Дәріс №1. Бірнеше айнымалылар функциялары

Анықтама. Екі (үш) айнымалы функция деп, анықталу облысы жазықтықтағы (кеңістіктегі) кейбір ішкіжиындар құрайтын, ал мәндер облысы E нақты сандар осіне жататын функцияны айтады.

Егер D - Oxy жазықтығында, ал E - Oz өсінде жатса онда екі айнымалы функцияны мына түрде жазамыз:

$$z = f(x, y)$$

Егер $D \subset Oxyz$, ал $E \subset Ou$, онда үш айнымалы функцияны мына түрде жазамыз:

$$u = f(x, y, z)$$

Анықтама. Радиусы r -ге тең жазықтықтағы $M_0(x_0, y_0)$ (немесе кеңістіктегі $M_0(x_0, y_0, z_0)$) нүктесінің аймағы деп центрі M_0 нүктесіндегі радиусы r-ге тең шеңберсіз дөңгелекті (немесе сфеарасыз шарды) айтады.

Мұндай аймақты $U_r(M_0)$ арқылы белгілейміз.

Жазықтықта $U_r(M_0)$ мына теңсіздігімен анықталады:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2,$$

ал кеңістікте $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2$,

D жиынының барлық шекаралық нүктелері осы жиынның шекарасы деп аталады және $\Gamma(D)$ деп белгіленеді.

Анықтама. $\Gamma(D)$ *шекарасын қамтитын D жиынын жабық (тұйық) жиын деп атаймыз. Бірде-бір шекаралық нүктесін қамтымайтын D жиыны ашық жиын деп аталады.*

Мысалдар.

1) $U_r(M_0)$ аймағы өз шекарасының бірде – бір нүктесін қамтымайды – шеңберді (немесе сфераны), сондықтан $U_r(M_0)$ – ашық жиын.
2) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$ теңсіздігімен жазықтықта берілген дөңгелек өз шекарасын – шеңберді қамтиды: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, сондықтан ол – жабық жиын.

C – сан болсын. $z = f(x, y)$ функциясының деңгей сызығы деп, координаталары $f(x, y) = C$ теңдігін қанағаттандыратын D анықталу облысындағы барлық $M(x, y)$ нүктелер жиынын айтамыз.

Мысал. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
функциясының әртүрлі деңгей сызықтарын табайық. Мұндай сызықтар

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = C$$

теңдеуімен анықталады.

$C = 0$ болғанда $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0$ аламыз;

$1 - x^2 - y^2 = 0$;

$x^2 + y^2 = 1$

Сондықтан 0-дік деңгейде сызық центрі координаталар бас нүктесіндегі радиусы 1-ге тең шеңбер болады.

C = 1/2 болғанда аламыз:

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\frac{1}{2};$$

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\frac{1}{4};$$

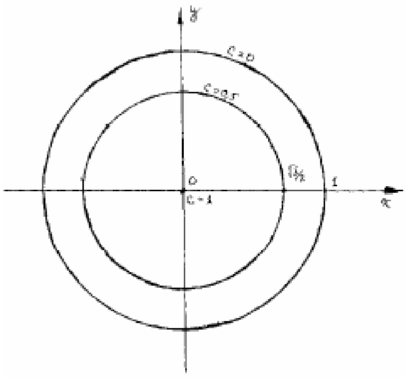
$$x^2+y^2=\frac{3}{4}.$$

C = 1/2 деңгейдегі сызық радиусы R = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -ге тең центрі координаталар бас нүктесіндегі шеңбер болады.

C =1 болғанда

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=1$$

теңдеуі $O(0,0)$ нүктесін, координаталар басын анықтайды (1 сурет)



C >1 және C < 0 болғанда $\sqrt{1-x^2-y^2}=C$ шешулері болмайды, сондықтан берілген функцияның деңгейлік сызықтары жоқ.

Үш айнымалы функция графигінің орнына келесі ұғымдарды пайдалануға болады.

$u = f(x, y, z)$ функциясының деңгей сызықтары C деп координаталары $f(x, y, z) = C$ теңдігін қанағаттандыратын D анықталу облысының барлық $M(x, y, z)$ нүктелер жиынын айтады.

Мысал. $u=x^2+y^2+z^2$ функциясын қарастырайық. C > 0 болғанда деңгей беттері радиусы C -ға тең центрі координаталар басында болатын сфералар. C = 0 болғанда 0 деңгей беті координаталар басы болады. C < 0 бұл функцияның деңгей беттері жоқ.

Бірнеше айнымалы функцияның шегі мен үзіліссіздігі.

Жоғарыда көрсетілген екі – үш айнымалылы функциялардың ұғымдарын n айнымалы жағдайға жалғастырайық.

n айнымалының функциясы

$$y=f(x_1,x_2,...,x_n)$$

деп, анықталу облысы $D \subset R_n$ - ге жататын, ал мәндер облысы нақты өсьте жататын функцияны атайды. Мұндай функциядағы әрбір $(x_1, x_2, ..., x_n)$ айнымалылар тобы D -дан алынған, жалғыз y санына сәйкес қояды.

n санды айнымалысы бар функцияның ең жақсы берілу әдісі – аналитикалық әдіс.

Анықтама. A саны $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі шегі деп аталады, егер әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $U_\delta(x_0, y_0)$ аймағындағы барлық (x, y) үшін, осы нүктеден басқа, төмендегі теңсіздік

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

орындалатындай $\delta > 0$ саны табылса.

Егер $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі шегі A болса, онда ол мына түрде белгіленеді:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$$

Бір айнымалы функциялар үшін қарастырылған барлық қасиеттер көп айнымалы функциялар үшін де дұрыс болады.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер төменгі үш шарт орындалса:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ бар болса,
2) (x_0, y_0) нүктесінде функцияның мәні бар,
3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функцияның үзіліссіздігін келесі теореманың көмегімен зерттеуге болады.

Теорема Кез келген $z = f(x, y)$ элементар функция өзінің анықталу облысының барлық ішкі нүктелерінде (шеткі нүктелерінде емес) үзіліссіз болады.

Дербес өсімшелер мен дербес туынды

Бір айнымалы функциямен салыстырғанда көп айнымалылы функцияның өсімшелерінің түрлері көп болады. Бұл жағдайда Oxy жазықтығындағы қозғалыс (x_0, y_0) нүктесінен әртүрлі бағыттарға қарай жүретініне байланысты.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі x бойынша өсімшесі Δx -ке сәйкес x бойынша дербес өсімшесі деп айтамыз:

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Сол сияқты $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі y - бойынша өсімшесі Δy − ке сәйкес y бойынша дербес өсімшесі деп мына айырманы айтамыз:

$$\Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

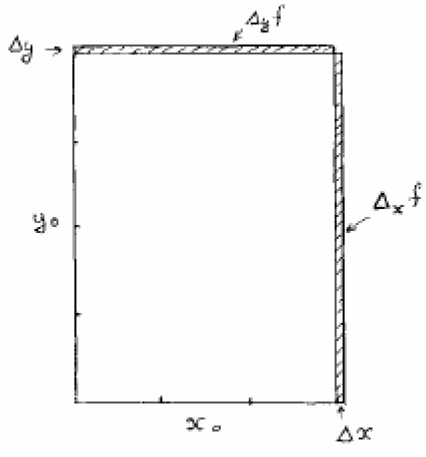
Мысал. $f(x, y) = xy$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$ болсын.

x, y бойынша функцияның дербес өсімшелерін табайық:

$$\Delta_x f = (x_0 + \Delta x)y_0 - x_0 y_0 = x_0 y_0 + \Delta x\, y_0 - x_0 y_0 = y_0 \Delta x = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4\ ;$$

$$\Delta_y f = x_0 (y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 y_0 + x_0 \Delta y - x_0 y_0 = x_0 \Delta y = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3;$$

Бұл мысалда аргументтердің бірдей өсімшелерінде Δx, Δy, дербес өсімшелер әртүрлі. Бұл тікбұрыштың қабырғалары $x_0 = 3$, $y_0 = 4$ болатын, x_0 -ді $\Delta x = 0{,}1$ ге өсіргенде ауданының $\Delta_x f = 0{,}4$ -ке, ал y_0 қабырғасын $\Delta y = 0{,}1$-ге өсіргенде ауданының $\Delta_y f = 0{,}3$ - ке өсетінін білдіреді. (2 сурет).



Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының (x_0, y_0) нүктесіндегі дербес туындысы деп осы функцияның x бойынша дербес өсімшесінің, осы нүктедегі, x аргументінің өсімшесі Δx - ке қатынасын айтады:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

Мұндай дербес туындылар $f'_x,\ z'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x}$ символдарымен белгіленеді. Соңғы жағдайда ∂ -әрпі «дербес» сөзін береді.

Осы (x_0, y_0) нүктесіндегі y бойынша дербес туынды мына

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

шекпен анықталады.

Бұл дербес туындының басқа белгіленулері: $f'_y,\ z'_y,\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y}$

Функциялардың дербес туындысы бір айнымалы функцияның туындыларын табу ережелері бойынша табылады, дифференциалданатын айнымалыдан басқа айнымалалар тұрақты деп есептелінеді.

f'_x - табу кезінде y тұрақты деп есептеледі, ал f'_y тапқанда x - тұрақты деп есептеледі.

Мысал. $z = x^y$ функциясының дербес туындыларды табайық:

$$f'_x = yx^{y-1},\ f'_y = x^y \ln x$$

Мысал. $u = xy^2z^3$ үш айнымалы функцияның дербес туындыларын табайық:

$$u'_x = y^2z^3,\ u'_y = 2xyz^3,\ u'_z = 3xy^2z^2$$

$z = f(x, y)$ функциясының дербес туындылары бір айнымалыны уақытша тұрақты деп белгілеп алғандағы функцияның жылдамдығын көрсетеді.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының дербес туындылары бар болса, онда оның дербес дифференциалдары деп

$$d_x f = f'_x dx,\ d_y f = f'_y dy$$

өрнектері аталады, мұндағы $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$.

Толық өсімше мен толық дифференциал

Функцияның толық өсімшесінің дербес өсімшелерден айырмашылығы - барлық айнымалылары өзгеріп отыратындығында.

Анықтама $z = f(x, y)$ функциясының (x_0 , y_0) нүктесіндегі аргументтердің $\Delta x, \Delta y$ өсімшелеріне сәйкес толық өсімшесі деп мына айырманы айтады:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 , y_0) \qquad (1)$$

Мысал. $f(x, y)= xy$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$ (алдыңғы мысалды қара). (x_0 , y_0) нүктесіндегі толық өсімшені табайық:

$\Delta f = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 y_0 + x_0\Delta y + y_0\Delta x + \Delta x\Delta y - x_0 y_0 = x_0\Delta y + y_0\Delta x + \Delta x\Delta y = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}01= 0{,}71.$

Бұл өсімше табандары 3,4 болатын тік төртбұрыштың әр қабырғасын 0,1 - ге өсіргендегі тік төртбұрыштың ауданының өсімшесіне тең.

Анықтама. Егер $z = f(x, y)$ функциясының (x_0 , y_0) нүктесіндегі толық өсімшесін

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

мұндағы A, B - тұрақты, α, β - шексіз аз шама, $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ жазуға болатын болса, онда

$$df = A\Delta x + B\Delta y$$

функцияның (x_0 , y_0) нүктесіндегі толық дифференциалы деп аталады. Толық дифференциалды функция өсімшесін негізгі бөлігі деп атайды.

Белгілі бір нүктеде толық дифференциалы бар функция осы нүктеде дифференциалданатын функция деп аталды.

Теорема 1. $z = f(x, y)$ функциясы және оның дербес f'_x, f'_y туындыларды (x_0 , y_0) нүктесінің кейбір аймағында үзіліссіз болсын. Онда $z = f(x, y)$ функциясы (x_0 , y_0) нүктесінде дифференциалданады және оның толық дифференциалы дербес дифференциалдардың қосндысына тең:

$$df = f'_x dx + f'_y dy \qquad (2)$$

Мысал. $z = \ln(x^2 + y^2)$ функциясының толық дифференциалын табыңдар.
Бұл функцияның дербес туындыларын табайық:

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},\ f'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

онда мынаны аламыз:

$$df = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy.$$

Егер (1) формулдағы толық өсімшені толық дифференциалмен ауыстырсақ, онда функцияның жуықтап табу формуласын аламыз:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,\ y_0)+f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y \qquad (3)$$

Мысал. $\sqrt{(4,05)^2+(2,97)^2}$ санды жуықтап есептейік.

Ол үшін $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ функциясының ($x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y$) нүктедегі, мұнда $x_0=4$, $\Delta x=0{,}05$, $y_0=3$, $\Delta y=-0{,}03$, мәнін жуықтап есептейік:

$$f(x_0,y_0)=f(4,3)=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5;$$

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_x(x_0,y_0)=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5};$$

$$f'_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ f'_y(x_0,y_0)=\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5};$$

Бул мәндерді (3) - ке қойып аламыз;

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}97)^2}\approx 5+\frac{4}{5}\cdot 0{,}05+\frac{3}{5}(-0{,}03)=5+0{,}04-0{,}018=5{,}022\,.$$

Ескерту $y=f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$ көп айнымалы функциясының толық дифференциалы мына формуламен есептелінеді:

$$dy=f'_{x_1}dx_1+f'_{x_2}dx_2+\dots+f'_{x_n}dx_n\,.$$

Мысал $u=xyz$ - үш айнымалы функцияның толық дифференциалын табайық:

$$u'_x=yz,\ u'_y=xz,\ u'_z=xy,$$

онда $du=yzdx+xzdy+xydz$.